Curvas y superficies con MATLAB

Mariano González y Roy Sánchez [1]

Resumen

Sabemos que las curvas y superficies son objetos representables en el plano y en el espacio tridimensional mediante funciones de una sola variable o de dos variables.

La representación gráfica en las computadoras facilita el estudio de las curvas y superficies. Mostraremos gráficamente las rectas tangentes a las curvas tanto en el plano como en el espacio tridimensional, así como los planos tangentes a las superficies y las curvas de nivel.

Palabras claves: Curvas, superficies, gráficas por computadora, Matlab.

Objetivo

El taller debe servir como una introducción a la construcción gráfica de curvas y superficies en las computadoras usando Matlab.

Curvas

Al construir la gráfica de una función y=f(x) en el intervalo [a, b], se debe tener presente que Matlab dibuja las curvas punto a punto; es decir, calcula los puntos (x; f(x)), para los valores de x que se le indique, luego se unen dichos puntos mediante segmentos. Por ello, se empieza estableciendo la matriz fila x cuyos elementos son los valores de x para los que se calculará el valor correspondiente de f(x). Si la distancia entre dos valores consecutivos de x es “suficientemente pequeña”, el aspecto final será el de una verdadera curva en lugar de una poligonal. El

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

comando *fplot*('f',[a,b]) grafica la función f en el intervalo [a,b] siendo f la regla de correspondencia.

Para crear otros gráficos bidimensionales también se usa *plot*(x, y), donde los argumentos x e y son vectores con el mismo número de elementos.

Para representar una función del tipo y=f(x) con el comando *plot*, el usuario necesita crear primero un vector con los valores de x del dominio de la función. En seguida, crear el vector y=f(x) con los correspondientes valores de f(x) y finalmente graficar la función f con Plot(x, y).

En el espacio de tres dimensiones la forma más sencilla de crear un gráfico 3-D es mediante la función plot3, cuya sintaxis es bastante similar a la de la función Plot en el plano.

Otro comando es x=*linspace*(a, b, n) que crea el vector **x** de n elementos en el cual el primer elemento es a y el último es b, todos igualmente espaciados.

Existen otros comandos en Matlab para graficar funciones tales como *inline*, que transforma en función la cadena de caracteres. Por ejemplo, para graficar la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, con *inline*('x.^2+y.^2','x','y') se crea la función f. En Matlab se usa el signo % para escribir los comentarios. Toda expresión después del signo % es ignorado por Matlab. También usaremos los comandos *subplot, contour, contour3, quiver, comet*, etc.

Curvas en el plano

Empezamos graficando funciones reales continuas definidas en un intervalo. Si f es una función real de variable real, su gráfica es el conjunto

$$Gr(f) = \{(x;y)/y = f(x),\ x \in \text{Dom}(f)\}.$$

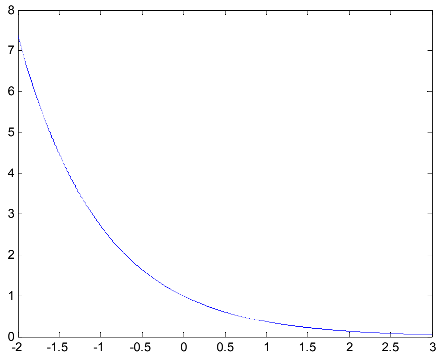
Ejemplos

1. Sea la función $f(x) = e^{-x}$, para $-2 \leq x \leq 3$. La gráfica de esta función en Matlab se obtiene mediante la siguiente secuencia:

x=*linspace*(-2,3,3000); % divide el intervalo [-2,3] en 3000 partes y crea el vector x con esas componentes.

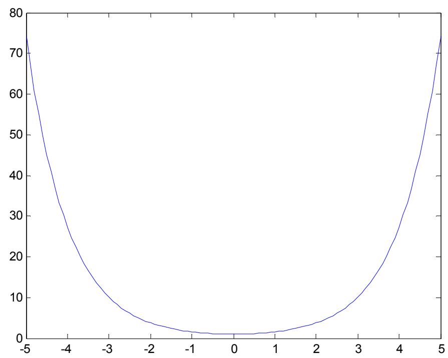
y=exp(-x); % crea el vector de la misma dimensión de x, que son las imágenes de las componentes de x.

Graficamos con *plot(x,y), grid on, title('f(x)=exp(x)'.*



Otra forma de graficar f : *fplot*('exp(-x)',[-2,3]).

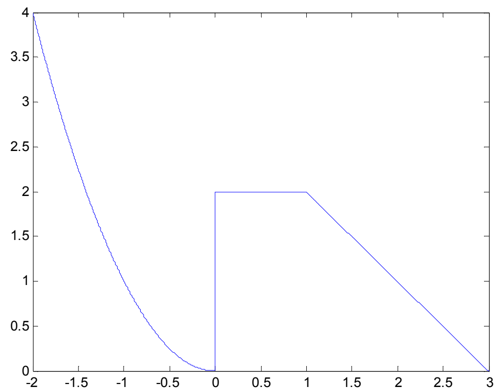
2. *Catenaria.* La función que describe esta curva es f(x)=cosh(x). Vamos a graficarla en el intervalo [-5,5].
   Su gráfica se obtiene directamente con:
   x=-5:0.1:5; % crea el vector x.
   y=cosh(x); % evalúa f en cada punto x de la división.
   plot(x,y).



3. Funciones seccionadas usando comandos lógicos. Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 2, & 0\le x<1 \\ -x+3, & 1\le x \end{cases}$$

Para graficar seguimos los siguientes pasos:
x=*linspace*(-2,3,3000); % divide el intervalo [-2,3] en 3000 partes.
y=(x.^2).*(x<0)+2.*((o<=x)&(x<1))+(-x+3).*(1<=x);
%evalúa f usando índice lógico
plot(x,y).



4. Gráfica de dos funciones definidas en un mismo intervalo.
   Sean las funciones, f(x) = sin(x) y g(x) = cos(x), con x en el intervalo [0,10].
   Con *fplot*('[sin(x),cos(x)]',[0 10]) % gráfica de f y g.

5. Curva de Agnesi para a=2 en $y=a^3/(x^2+a^2)$. Ejercicio.

Curvas dependientes de un parámetro

Sea F(x, y)=0 la ecuación cartesiana de una curva C. Si tanto x como y son funciones de una tercera variable t, entonces la curva queda representada por las ecuaciones

$$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in I=[a,b],$$

denominadas ecuaciones paramétricas de C y t el parámetro.

Para cada valor de t, las ecuaciones paramétricas determinan valores correspondientes de x y de y, siendo (x; y) un punto de la curva.

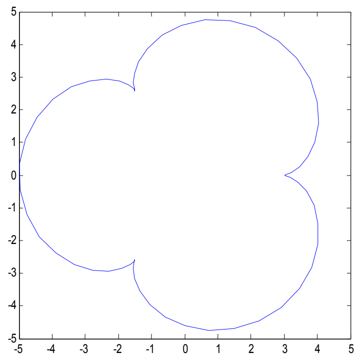
Ejemplos

1. Sea la curva con ecuaciones paramétricas

$$C:\begin{cases} x(t)=4\cos(t)-\cos(4t), & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=4\text{sen}(t)-\text{sen}(4t), \end{cases}$$

Su gráfica se obtiene según la secuencia

```
t=0:0.1:2*pi; % división del intervalo
x=4*cos(t)-cos(4*t);
y=4*sin(t)-sin(4*t);
plot(x,y) % gráfica de C.
```



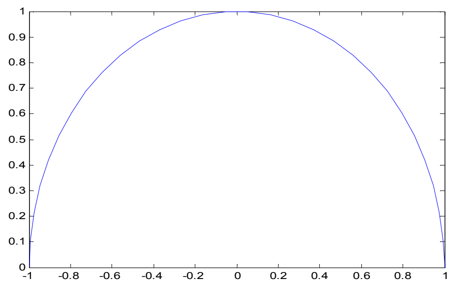
Si guardamos la secuencia anterior en un archivo con la extensión .m, tal archivo se puede invocar para graficar la curva en otro momento.

2. Sea C la semicircunferencia unitaria con ecuaciones paramétricas

$$C:\begin{cases} x(t)=\cos t, & t\in[0,\pi] \\ y(t)=\text{sen}\ t, \end{cases}$$

Gráfica de C.

```
t=linspace(0,pi,30);
plot(cos(t),sin(t))
```

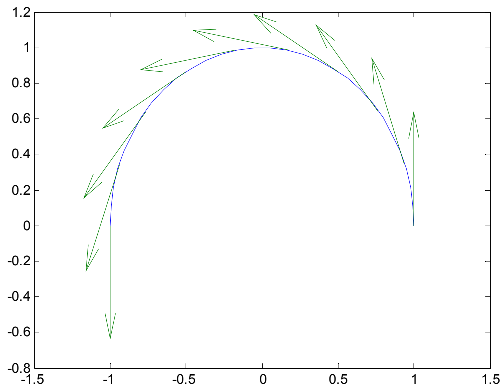


3. Vectores tangentes a la semicircunferencia anterior en 10 puntos de la curva.
   A la semicircunferencia anterior le adicionamos los vectores tangentes con:

   hold on % permite adicionar otros gráficos en el mismo sistema de coordenadas.

   t=linspace(0,pi,10);

   quiver(cos(t),sin(t),-sin(t),cos(t).% gráfica de vectores tangentes a la curva



Nota. quiver3 grafica los vectores tangentes a una curva en el espacio.

4. *Folio de Descartes.* Definida por las ecuaciones

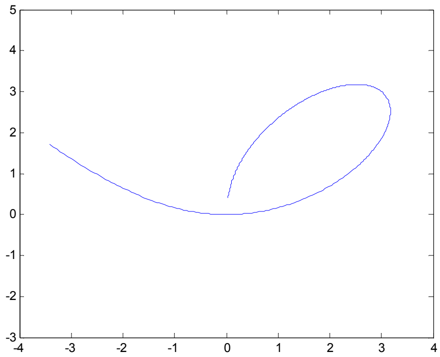
$$x = \frac{3at}{1+t^3}\text{ , -1< t}$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \; a > 0.$$

Para *a*=2 en el intervalo [-0.5,45], graficamos la curva
t=linspace(-0.5,45,2000);

*x=6*t./(1+t.^3); y=6*t.^2./(1+t.^3);*

plot(x,y)



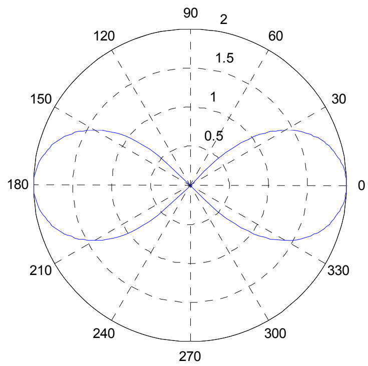
Curvas en coordenadas polares

Las coordenadas polares de un punto P las denotaremos por (r,θ), donde r representa el radio vector y θ el ángulo polar.

Ejemplos

1. *Cardioide*. Ecuación r = 1+cos(θ) donde 0≤θ≤2π.
   teta=linspace(0,2*pi,60);
   r=1+cos(teta);
   polar(teta,r)

2. *Lemniscata de Bernoulli*.
   Generada por la ecuación r^2 = 4cos(2θ), 0≤ θ≤2π.
   La gráfica se obtiene mediante
   theta=linspace(0,2*pi,300);
   r=sqrt(4*cos(2*theta)); % no considera los valores complejos de r.
   polar(theta, r)



Curvas en el espacio tridimensional

Existe una conexión muy estrecha entre las funciones vectoriales continuas de una variable con las curvas.
Una función vectorial **r** definida sobre un intervalo I=]a, b[, es una correspondencia entre los puntos de I con los vectores del espacio, mediante $r(t)=(x(t),y(t),z(t));t\in I$.

La función vectorial *r* es continua en $t=c\in I$ si y solo si sus funciones componentes x, y, z son continuas en t=c.

Curvas paramétricas en el espacio tridimensional

Sea x = x(t), y = y(t), z = z(t), funciones reales continuas en el intervalo I. El conjunto C = {(x, y, z) $\in R^3$ /x = x(t), y = y(t), z = z(t), t $\in$ I} se denomina curva en el espacio.

Las ecuaciones x=x(t), y=y(t), z=z(t), t$\in$ I, se llaman ecuaciones paramétricas de C y t el parámetro. En algunos casos es conveniente parametrizar la curva mediante el parámetro longitud de arco.

El vector posición de cada punto de la curva es la función vectorial de la curva. El vector **r′**(t)=(x′(t), y′(t), z′(t)); t$\in$ I, es el vector tangente (o vector velocidad) de la curva en t.

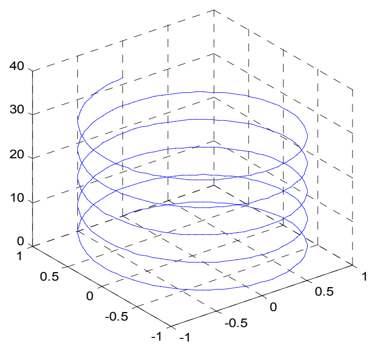
Curva regular es aquella que tiene recta tangente en cada uno de sus puntos.

Ejemplos

1. *Hélice circular recta*. Sus ecuaciones paramétricas son

x=sen(t), y=cos(t), z=t, $t \in [0,10\pi]$.
La curva C es la que envuelve al cilindro S:$x^2+y^2=1$.
Vamos a graficar C de dos formas.
Usando *plot3*

```
t=0:pi/50:10*pi; %la longitud del intervalo es opcional
plot3(sin(t),cos(t),t)
grid on
axis Square.
```



Otra opción. *ezplot3*. Para ello, declaramos simbólicamente al parámetro t y graficamos con animación

```
syms t
x=cos(t);
y=sin(t);
z=t./(2*pi);
ezplot3(x,y,z,[0,10*pi],'animate') % sobre la curva C recorre un punto de color rojo con una velocidad proporcional a su módulo.
```

2. Hélice circular recta junto a vectores tangentes, con *quiver3*.

   Sea la curva: x=cos t, y=sin t, z=$\frac{t}{2\pi}$, t$\in$ [0,10π].

   Gráfica de la curva con 20 vectores tangentes.

```
t=linspace(0,10*pi,101);
x=inline('cos(t)');
y=inline('sin(t)');
```

```
z=inline('t/(2*pi)');
plot3(x(t),y(t),z(t))% gráfica de la hélice.
hold on
for s=linspace(0,10*pi,20)
quiver3 (x (s) , y (s), z(s), - y(s), x (s), 1/(2*pi)) % vectores tangentes
end
hold off
view(135,45).
```

Curvas que resultan de la intersección de dos superficies.

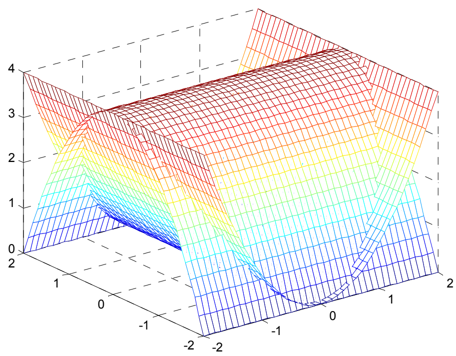
Existen muchos casos donde no se puede visualizar la curva que resulta de la intersección de dos superficies.

Ejemplos

1. La intersección de los cilindros: $z=x^2$, $z=4-y^2$ es una curva en el espacio. Vamos a graficar las dos superficies y luego la curva intersección.

   Gráfica de las superficies

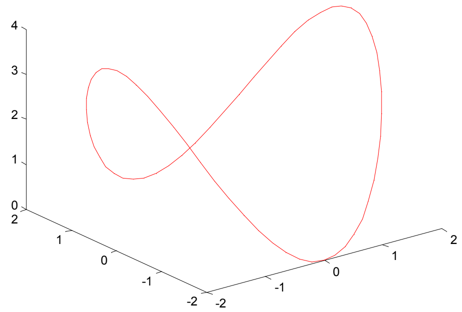
```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);
z=x.^2; mesh(x,y,z) % primer cilindro
hold on % autoriza a la otra gráfica
z=4-y.^2; %segundo cilindro
mesh(x,y,z)
```



   Ahora la curva de intersección

```
t=0:pi/32:2*pi;
u=2*cos(t);
```

```
v=2*sin(t);
w=4*(cos(t)).^2;
plot3(u,v,w,'r')
```



Para obtener la proyección de esta curva al plano XY, reemplazar w=0*ones(1,65);

2. Sean las superficies $S_1 : z=x^2+y^2$, $S_2 : z=2+y$.

   a. Halle las ecuaciones paramétricas de la intersección de las dos superficies

   b. Grafique la curva.

Proyectando la curva al plano XY, esto es, igualando las ecuaciones se obtiene $x^2+(y-1/2)^2=9/4$.

Ecuaciones paramétricas de la curva

$x(t) = (3/2)\cos t$

$y(t) = (3/2)\sin t+(1/2)$

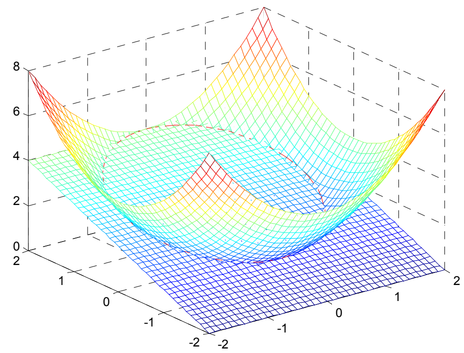
$z(t)=5/2+(3/2)\sin t$. Reemplazando y(t) en z(t).

Gráfica de las dos superficies

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);% dominio D común.
z=x.^2+y.^2;
mesh(x,y,z)
hold on
z=2+y;
mesh(x,y,z)
```

Grafica de la curva mediante

```
t=0:pi/32:2*pi;
u=1.5*cos(t);
v=1.5*sin(t)+0.5;
w=2.5*ones(1,65)+1.5*sin(t);
plot3(u,v,w,'r')%curva en rojo
```



Curvas de nivel

Sea S una superficie representada por z=f(x; y).

La importancia de las curvas de nivel radica en que trazando un número adecuado de ellas, podemos obtener una buena descripción de la superficie.

Ejemplo

3. Las curvas de nivel de la superficie S: $z=f(x,y)=4x^2+y^2$ respecto al valor k son familias de elipses $4x^2+y^2 = k$, k>0, concéntricas en el origen de coordenadas con semiejes $\sqrt{k}/2$ y $\sqrt{k}$, $k>0$.

   Gráfica de la superficie y algunas curvas de nivel.

   $$4x^2+y^2 = k \Rightarrow \frac{x^2}{k/4}+\frac{y^2}{k}=1$$

   Gráfica de la superficie y algunas curvas de nivel.

   [x, y] = *meshgrid* (-2:.1:2); % crea una malla en la región [-2,2] x [-2,2].
   z=4*x.^2+y.^2; % evalúa f.

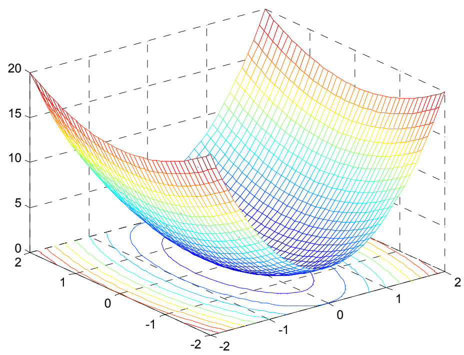
Varias opciones para graficar las curvas de nivel.

contour(x,y,z,10)% se obtiene 10 curvas de nivel en el plano XY.

contour3(x,y,z,10)% las curvas están ubicadas sobre la superficie.

meshc(x,y,z) % la superficie y las curvas de nivel proyectadas al plano XY.

La superficie y las curvas de nivel están graficadas con meshc.



Superficies

En general cada uno de nosotros tenemos una idea de superficie. El plano es la superficie más simple de todas. Una idea intuitiva para construir otras superficies es ir pegando pedazos de plano por sus bordes hasta construir una aproximación a la superficie deseada. Por ejemplo, una pelota de futbol de 32 paños es una buena aproximación a la esfera.

Una superficie S puede ser descrita como un conjunto de puntos (x; y; z) que satisfacen una ecuación de la forma f(x;y;z)=0, donde f es una función continua.

Si es posible despejar de la ecuación f(x; y; z) = 0 una de las variables en función de las otras, se obtiene una representación explícita de S o de una parte de S. Si no es posible, se llama representación implícita de S.

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto

$Gr(f)=\{(x,y,f(x,y))\in R^3 / z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ donde D es una región conexa del plano.

El conjunto *Gr(f)* representa a una superficie S en el espacio de forma tal que su proyección sobre el plano XY es D, el dominio de f. En consecuencia, a cada punto (x; y) en D le corresponde un punto (x; y; z) en la superficie y, recíprocamente, a cada punto (x;y; z) en la superficie le corresponde un punto (x; y) en D.

Definición. Un subconjunto S de $\mathbf{R}^3$ se denomina una superficie regular si para cada p en S existe una vecindad $V\subset\mathbf{R}^3$ de p, un abierto $U\subset\mathbf{R}^2$ y una biyección $\varphi: U\to V\cap S$ con las siguientes propiedades:

1. $\varphi\in C^\infty$
2. φ es un homeomorfismo ($\varphi^{-1}: V\cap S\to U$ es continua).
3. Para cualquier $q\in U$ la matriz jacobiana Jφ(q) tiene rango dos.

Gráfica de una superficie

Para graficar una superficie se debe tener en cuenta los siguientes pasos

1. Crear una malla o rejilla que cubra el dominio de f.
2. Calcular el valor de f(x; y) en cada punto (x; y) de la rejilla.
3. Ubicar en $\mathbf{R}^3$ los puntos (x; y ; f(x;y)).

Sea S: z=f(x;y) una superficie definida en el rectángulo D=[a,b] x [c,b] $\subset R^2$.

1. Particionamos el rectángulo D en pequeños rectángulos de dimensiones Δx y Δy.

   Las longitudes son: $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ y $\Delta y=\dfrac{d-c}{m}$

   Esta partición genera un vector fila **x** y un vector columna **y** de n + 1 y m + 1 componentes, respectivamente

Los vértices de los rectángulos en la partición de D constituyen la malla de (m+1)×(n+1) puntos.

2. Con esos puntos vamos a construir matrices X y Y de orden (m+1) × (n+1).

   En Matlab, esas matrices se generan mediante: [X,Y]=meshgrid(x,y).

3 Ingresamos la función f(x; y) en Matlab mediante *f=inline*('f(x,y)','x','y').

4 Evaluamos f en las matrices X y Y mediante Z=f(X; Y).

5 Gráfica de la superficie *surf*(X, Y, Z).

Ejemplos

1. *Paraboloide elíptico*. La ecuación de la superfcie,

   S: $z=f(x,y)=10x^2+y^2$, $(x,y) \in D=[-5,5]x[-4,4]$.

   a. Partición de D = [-5, 5] × [-4, 4], con subintervalos de longitudes $\Delta x=\Delta y=0.4$. Se forma el vector fila x=-5:0.4:5; de n+1=26 elementos y el vector columna y=-4:0.4:4; de m+1=21 elementos.

   b. [X,Y]=*meshgrid*(x,y)% construye matrices X y Y, cada una de ellas de orden (21)x(26).

   c. f=*inline*('10*x.^2+y.^2','x','y')% ingresa f

   d. Z=f(X,Y)% evalúa f en los vectores X y Y.

   e. *surf*(X,Y,Z)% gráfica de la superficie.
   Existen otras opciones para las superficies: mesh(X,Y,Z) o plot3(X,Y,Z).

2. *Superficie embudo*
   La gráfica de la superficie S: $z=\ln(x^2+y^2)$ que tiene forma parecida a un embudo.

   [X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);
   Z=log(X.^2+Y.^2);
   mesh(X,Y,Z).

Además de la superficie S se puede graficar, en el mismo sistema, n curvas de nivel.

[X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);

Z=log(X.^2+Y.^2);

meshc(X,Y,Z).

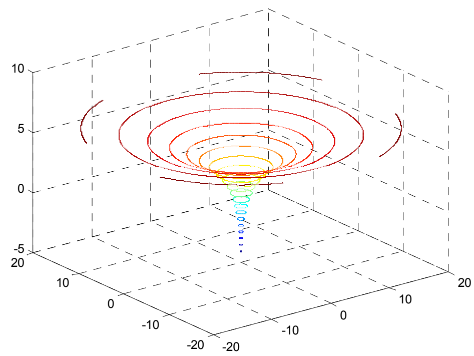
Gráfica de n curvas de nivel.

[X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);

Z=ln(X.^2+Y.^2);

contour3(X,Y,Z,20).% el número 20 indica el número de curvas.

Con contour3 se ha graficado las 20 curvas de nivel que aparecen en la figura adjunta.



Otra opción es con *surfl(x, y, z)*.

2. Gráfica de la superficie denominada "volcán".

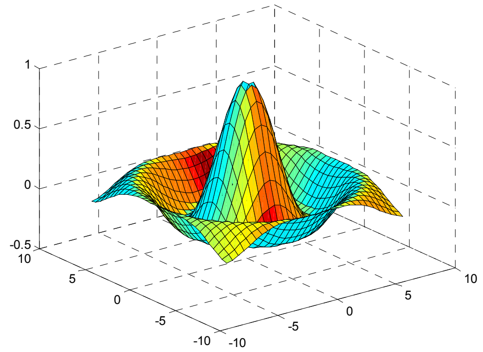
$$S: z = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La gráfica de S en Matlab, según la secuencia:

[x,y]=meshgrid(-7.5:0.5:7.5);

z=sin(sqrt(x.^2+y.^2))./sqrt(x.^2+y.^2);

surfl(x,y,z);%dibujo con sombreado



Gráficas sombreadas se consigue con el comando shading interp.

Superficies de revolución

Una superficie de revolución es la generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de la curva.

La curva plana se llama *generatriz*, y la recta fija *eje de revolución* o, simplemente eje de la superficie. Cualquier posición de la generatriz se llama *meridiano*, y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz se llama *paralelo* de la superficie.

Para determinar la ecuación de una superficie de revolución, no se pierde generalidad si se toma la generatriz en uno de los planos coordenados y como eje de revolución a uno de los ejes coordenados contenidos en ese plano.

Sea G la curva generatriz contenida en el semiplano superior YZ, $G : z=f(y)\geq 0$ y el eje de revolución el eje Z. Sea $P(x;y;z)$, un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por P corta a G en un punto del plano YZ, digamos $Q(0;y';z')$, y su centro $A(0;0;z')$ está sobre el eje de revolución, el eje Z.

Por ser radios del mismo paralelo, $|AP|=|AQ|$ entonces $z'=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Además, P y Q están en el mismo plano, entonces $z'=z$. Como $Q\in G : z'=f(y')$.

Reemplazando y′, z′, en z'=f(y') se obtiene la ecuación de la superficie de revolución z=f($\sqrt{x^2+y^2}$)

Graficaremos las superficies de revolución como si fueran superficies paramétricas, considerando a x e y como parámetros.

Ejemplo

Sea la curva C: $z=y^2$ en el plano YZ. Si el eje de rotación es el eje Z, halle la ecuación de la superficie de revolución que genera C.

Solución

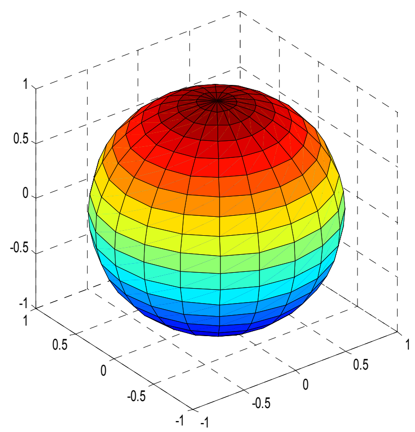
En el plano $z=z_0$ se encuentra un paralelo, cuyo centro es $A(0;0;z_0)$.

El punto $Q(0;y_0;z_0)$ es un punto que resulta de la intersección de C con el plano $z=z_0$. Si P(x; y; z) es un punto arbitrario de la superficie que se encuentra en el paralelo entonces $|AP|=|AQ|$ y esto implica que $|y_0|=\sqrt{x^2+y^2}$. Como $Q\in C$: $z_0=y_0{}^2$, entonces la ecuación de la superficie es $S{:}z=x^2+y^2$.

Superficies de revolución definidas en MatLab

Se pueden graficar directamente ciertas superficies de revolución conocidas como esferas, cilindros, elipsoides, etc.

Esfera. Su grafica se obtiene con el comando *sphere(n)*, donde n es el número de puntos en los que queda dividido tanto el ecuador como el meridiano principal. A raíz de esa división se grafica la esfera con n paralelos y n meridianos.
Con *sphere*(20) se obtiene el gráfico adjunto.



Vectores normales a una esfera. Se obtiene con

[x,y,z]=sphere(20); surfnorm(x,y,z). Los vectores se ubican en cada punto de intersección de los paralelos con los meridianos.

Cilindro. Con el comando *cylinder(R, n)* se grafica automáticamente un cilindro de revolución de radio R con eje el eje Z y considerando n segmentos como generatrices. La circunferencia de la base del cilindro se divide en n puntos, por donde pasan dichas generatrices.

Lo *más importante* de esta aplicación es que se puede graficar superficies de revolución que tienen el perfil de la curva r=r(t), $t \in [a, b]$.

Superficies Paramétricas

Una superficie S puede ser representada por una función vectorial r(u,v) = (x, y, z), donde $(u,v) \in D$, región conexa del plano. Las funciones x, y, z dependen de los parámetros u y v. A las ecuaciones

x=x(u,v),

y=y(u,v),

z=z(u,v),

se denomina ecuaciones paramétricas de S.

Ejemplos

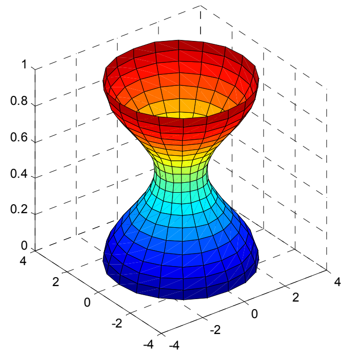
1. Superficie de revolución con perfil la curva definida por $r=\sqrt{t}$, $t \in [0,2]$.

   ```
   t=linspace(0,2,20);
   r=sqrt(t);
   cylinder(r)
   xlabel('t');ylabel('r(t)');zlabel('z(t,r)').
   ```

2. Superficie de revolución de perfil 2+cost

   ```
   t = 0:pi/10:2*pi;
   [X,Y,Z] = cylinder(2+cos(t));
   surf(X,Y,Z)
   ```

```
axis square
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z').
```



3. Cilindro como superficie de revolución

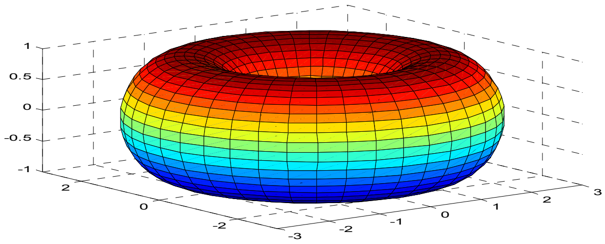
```
r=(0:0.1:2*pi)';
t=-pi:0.1:2*pi;
X=cos(r)*sin(t);
Y=sin(r)*sin(t);
Z=ones(1,size(r))'*t;
surf(X,Y,Z)
axis square
```

4. El *Toro.* Considere en R^3 la circunferencia $C=\{(x,y,z):(y-2)^2+z^2=1, x=0\}$.

   Al rotar C alrededor del eje Z se obtiene el toro.
   Una parametrización está dada por:
   $\varphi(u,v) = (\cos u(2+\cos v),\sin u(2+\cos v),\sin v)$.
   $0\leq u\leq 2\pi, 0\leq v\leq 2\pi$.

   Gráfica del toro.

```
u=linspace(0,2*pi,41); v=u;
[U,V]=meshgrid(u,v);
X=cos(U).*(2+cos(V));
Y=sin(U).*(2+cos(V));
Z=sin(V);
surf(X,Y,Z)
axis([-3 3 -3 3 -1 1])
```



5. Identifique y dibuje la superficie S generada por

   r(u,v) = 2cos u i + v j + 2sin u k.
   Las ecuaciones paramétricas de S: x(u,v)=2cos u, y(u,v)=v, z(u,v)=2sin u.

   Identificamos a S eliminando los paramétros u y v.

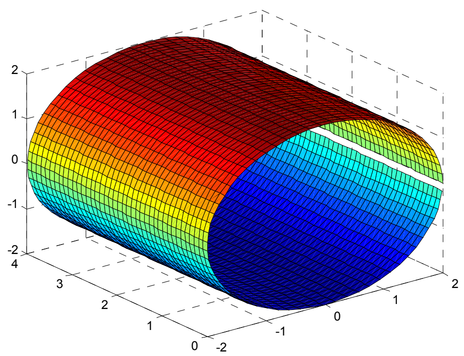
   $x^2+z^2 = 4$, y = v.

   La superficie es un cilindro circular de radio 4, con eje el eje Y. La variable y=v puede tomar cualquier valor real.

   Para graficar en Matlab restringimos los parámetros a, $0\le u\le 2\pi$ y $0\le v\le 4$.

   Ahora la superficie es un cilindro circular recto de radio 2 y altura 4.

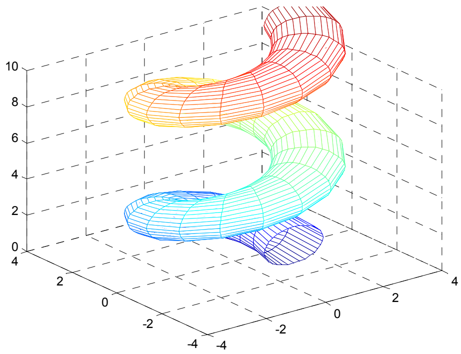
```
u=(0:0.1:2*pi)';%vector columna de m elementos
v=0:0.1:4;%vector fila de n elementos
X=2*cos(u)*ones(size(v));
Y=ones(size(u))*v;
Z=2*sin(u)*ones(size(v));
    surf(X,Y,Z)
```



6. Superficie *"Boa Amazónica"* o "Tobogán", se obtiene variando la gráfica del toro.

```
u=(0:pi/8:4*pi)';%vector columna de m=33 elementos
v=0:pi/16:2*pi;%vector fila de n=33 elementos
X=cos(u)*(2+sin(v));%X, Y y Z son matrices de orden mxn=33x33
Y=sin(u)*(2+sin(v));
Z=u*ones(size(v))+ones(size(u))*cos(v);
mesh(X,Y,Z)%surfl(X,Y,Z)%surf(X,Y,Z)
axis([-4 4 -4 4 0 10])
```

Nota. Se multiplica por *ones(size())* en Z para la consistencia de multiplicación de matrices.



7. El *unicornio.* Ecuaciones paramétricas:

$$x = 2[1 - e^{u/(6\pi)}]\cos(u)\cos^2(\frac{v}{2})$$

$$y = 2[-1 + e^{u/(6\pi)}]\sin(u)\cos^2(\frac{v}{2}),$$

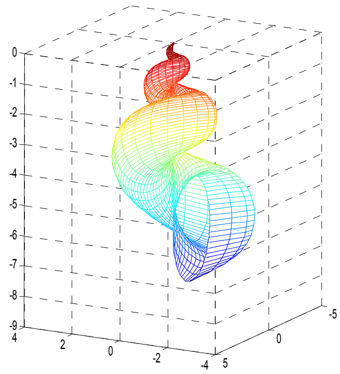
$$z = 1 - e^{u/(3\pi)} - \sin(v) + e^{u/(6\pi)}\sin(v).$$

$0 \le u \le 6\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$.

La gráfica en Matlab

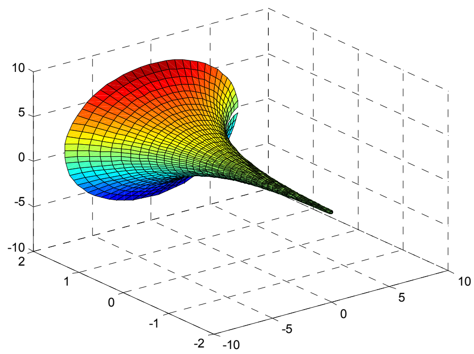
```
u=linspace(0,6*pi,60);
v=linspace(0,2*pi,60);
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=2*(1-exp(u/(6*pi))).*cos(u).*cos(v/2).^2;
y=2*(-1+exp(u/(6*pi))).*sin(u).*cos(v/2).^2;
```

```
z=1-exp(u/(3*pi))-sin(v)+exp(u/(6*pi)).*sin(v);
mesh(x,y,z)
```



8. *Trompeta de Gabriel*

```
u=(-2:0.1:2)';
v=0:0.1:2*pi;
X=exp(u)*cos(v);
Y=u*ones(size(v));
Z=exp(u)*sin(v);
surf(X,Y,Z)
xlabel('v');ylabel('u');zlabel('z')
```



9. Dos cilindros perpendiculares, uno de ellos tiene como eje el eje Z y radio 1 y el otro tiene como eje el eje Y y radio 1/2.

Cilindro de radio 1.
x=cos u
y=sin u
z=v

Cilindro de radio ½.

x=(1/2)cos u

y=v

z=(1/2)sin u

Gráfica en Matlab.

```
u=linspace(0,2*pi,41);
v=linspace(-2,2,41);
[U,V]=meshgrid(u,v);
%Cilindro de radio 1
surf(cos(U),sin(U),V);
hold on
%Cilindro de radio 1/2
surf(0.5*cos(U),V,0.5*sin(U));
```

10. *La Cinta de Möbius.* Es una superficie que se puede construir a partir de una tira de papel de forma rectangular ABCD. Torciendo la tira, una sola vez, de manera que se haga coincidir el vértice A con el vértice C y el vértice B con el vértice D obteniendo la superficie mencionada.

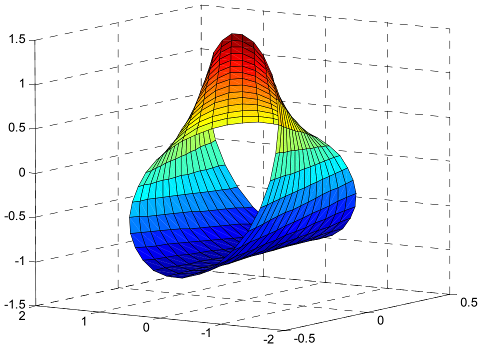
    Se genera con la función vectorial r(u,v) definido por

    $[\frac{v}{2}\mathrm{sen}\frac{u}{2},(1+\frac{v}{2}cos\frac{u}{2})\mathrm{sen}u,(1+\frac{v}{2}cos\frac{u}{2})cos\,u]$,

    $0\leq u\leq 2\pi;-1\leq v\leq 1$.

    La gráfica en Matlab.

```
u=linspace(0,2*pi,30);
v=linspace(-1,1,15);
[u,v]=meshgrid(u,v);
z=(1+v/2.*cos(u/2)).*cos(u);
y=(1+v/2.*cos(u/2)).*sin(u);
x=v/2.*sin(u/2);
surf(x,y,z)
```



11. *Superficies tubulares*. A partir de una curva conocida vamos a generar una superficie tubular. Sean las ecuaciones de la hélice circular recta.

    x=cos(t), y=sen(t) y z=t/2, con t en $[0,4\pi]$.

    La superficie se forma considerando como eje la hélice circular.
    Sus ecuaciones paramétricas, con t=u, son

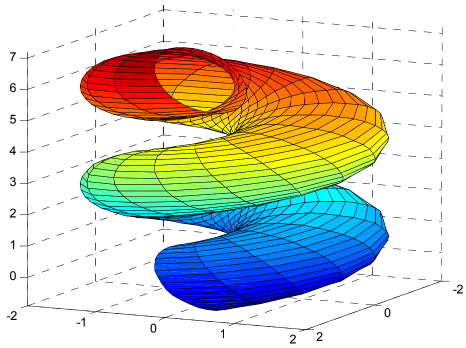
    $$\mathrm{X} = cos(\mathrm{u}) - 0.5cos(\mathrm{u})cos(\mathrm{v}) + (0.5/\sqrt{5})\mathrm{sen}(\mathrm{u})\mathrm{sen}(\mathrm{v})$$

    $$\mathrm{Y} = \mathrm{sen}(\mathrm{u}) - 0.5\mathrm{sen}(\mathrm{u})cos(\mathrm{v}) - (0.5/\sqrt{5})cos(\mathrm{u})\mathrm{sen}(\mathrm{v})$$

    $$\mathrm{Z} = 0.5\mathrm{u} - (1/\sqrt{5})\mathrm{sen}(\mathrm{v})$$

    La gráfica en Matlab.

```
%Superficies tubulares: eje la hélice circular recta.
u=(0:pi/8:4*pi)';%vector columna de m=33 elementos
v=0:pi/16:2*pi;%vector fila de n=33 elementos
X=cos(u)*ones(size(v))-
cos(u)*cos(v)+1/sqrt(5)*sin(u)*sin(v);
Y=sin(u)*ones(size(v))-sin(u)*cos(v)-
1/sqrt(5)*cos(u)*sin(v);
Z=u/2*ones(size(v))+2/sqrt(5)*ones(size(u))*sin(v);
surf(X,Y,Z)% otra opciones mesh(X,Y,Z),surfl(X,Y,Z)
axis([-2 2 -2 2 -2 10])
view(50,30)
axis tight
axis([-2 2 -2 2 -2 10])
```



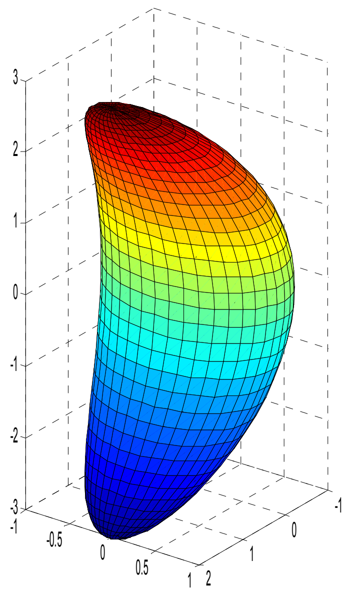
12. En las ecuaciones paramétricas de un elipsoide perturbamos un poco en la dirección x, para generar la gráfica de un plátano.

    Sean las ecuaciones paramétricas de un elipsoide

    x(u,v)=cos(u)cos(v)
    y(u,v)=sin(u)cos(v)
    z(u,v)=3sin(v), 0≤u≤2π;-(π/2)≤v≤(π/2).
    Alteramos un poco en la primera ecuación por x(u,v)=cos(u)cos(v)+2sin^2(v).

    La gráfica del plátano se obtiene de las siguientes instrucciones.

```
u=linspace(0,2*pi,41);
v=linspace(-0.5*pi,0.5*pi,41);
[U,V]=meshgrid(u,v);
X=cos(U).*cos(V)+2*sin(V).^2;
Y=sin(U).*cos(V);
Z=3*sin(V);
surf(X,Y,Z)
axis([-1 2 -1 1 -3 3])
```



Ejercicios

1. Sea la función f(x)=4arctan(x) definida en el intervalo cerrado [-5,5]. La grafica de f en dicho intervalo con fplot('atan(x)',[-5,5]).

2. La Cicloide. Las ecuaciones paramétricas son.

$$C:\begin{cases} x(t)=t-\sin(t), & t\in[-2\pi,4\pi] \\ y(t)=1-\cos(t), \end{cases}$$

La deducción de estas ecuaciones se puede encontrar en el texto de Ch. Lehmann [1980].

```
t=-2*pi:0.1:4*pi;
x=t-sin(t);
y=1-cos(t);
plot(x,y)
axis([-2 8 0 2])% para la escala en los gráficos.
```

3. Grafique la curva en coordenadas polares $r= 2(1 - \cos(\theta))$, $0 \leq \theta\leq 2\pi$.

4. Halle la gráfica de la rosa de 4 pétalos $r =4\sin(2\theta)$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

5. Las gráficas de las siguientes ecuaciones se asemejan al de una mariposa. Fueron descubiertas por Temple H. Fay en 1989.

    1. $r= e^{\cos\theta} -2\cos(4\theta)$.

    2. $r= e^{\cos\theta} -2\cos(4\theta)+ \sin^5(\theta/12)$, $0\leq\theta\leq 24\pi$.

    Visitar la página:

    http://revistas.pucp.edu.pe/enblancoynegro/numeros-publicados

6. Grafique la superficie $z= \sin(\sqrt{x^2+y^2})$ con la siguiente secuencia en Matlab.

```
x=linspace(-2,2,30);
y=linspace(-2,2,30);
[x,y]=meshgrid(x,y);
z=sin(sqrt(x.^2+y.^2));
mesh(x,y,z)
axis tight
view(120,30)
```

7. Grafique la superficie

   x(u,v)=ucos v
   y(u,v)=usin v
   z(u,v)=v
   $0 \le u \le 8\pi$, $0 \le v \le 4$.

8. Cilindro transparente.

   Un cilindro de altura 1 y radio r, transparente con cylinder de Matlab
   t=input('dame t'); Número de generatrices que corta a la circunferencia base.
   r=input('radio');
   [x,y,z]=cylinder(r,30);
   surfc(x,y,z,'FaceAlpha','flat','AlphaDataMapping','scaled',...
   'AlphaData', gradient(z),'FaceColor','red').

9. Grafique el elipsoide de ecuaciones

   x=3cos(u)sen(v), y=4sen(u)sen(v), z=5cos(v), $u \in [0,2\pi]$ y $v \in [0,\pi]$.

10. Grafique el hiperboloide de dos hojas

    x=senh(u)cos(v), y=senh(u)sen(v), z=cosh(u), $u \in [-2,2]$ y $v \in [0,2\pi]$.

11. Pseudoesfera con ecuaciones

    x=cos(u)sen(v),
    y=sen(u)sen(v),
    z=cos(v)+ln(tan(v/2)), $u \in [0,2\pi]$ y $v \in [0,\pi]$.

Conclusiones

- En este taller mostramos las cualidades del software Matlab, programa que nos ayudó a visualizar las curvas y superficies en las computadoras en el espacio de tres dimensiones.
- Para comprender mejor las propiedades de las curvas y superficies es necesario representar gráficamente en la

computadora a sus vectores tangentes, a las curvas de nivel, a las curvas generatrices, a las directrices, etc.

- Matlab ayuda a entender mejor el Análisis Matemático y facilita el cálculo de las longitudes de arco, áreas, volúmenes y otros cálculos
- Es posible profundizar en las investigaciones sobre superficies tubulares y sobre las superficies en cuatro dimensiones.

Bibliografía

1. Lehmann Ch. *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, México, 1980.
2. Lang Serge. *Cálculo I y II*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
3. Marchand, P., Holland, T. Graphics and GUIs with MATLAB, editorial Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2003.
4. Manfredo Do Carmo, Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Alianza Editorial 1976
5. González, Mariano http://macareo.pucp.edu.pe/~mgonzal/publicaciones_archivos/Superf_Tub.pdf